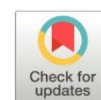


Modelo comparativo de la ecuación de calor unidimensional: perspectivas deterministas y estocásticas

One-dimensional heat equation comparative model: deterministic and stochastic perspectives

- ¹ Brighth Magdalena Jiménez Tillaguango  <https://orcid.org/0009-0000-6282-9031>
Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH), Riobamba, Ecuador.
Maestría en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional
brighth.jimenez@unach.edu.ec
- ² Lidia del Rocio Castro Cepeda  <https://orcid.org/0000-0002-0471-2879>
Universidad Nacional de Chimborazo (UNACH), Riobamba, Ecuador.
Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación
lidia.castro@unach.edu.ec



Artículo de Investigación Científica y Tecnológica

Enviado: 12/05/2026

Revisado: 13/06/2026

Aceptado: 08/07/2026

Publicado: 28/07/2026

DOI: <https://doi.org/10.33262/ap.v8i3.701>

Cítese:

Jiménez Tillaguango, B. M. ., & Castro Cepeda, L. del R. (2026). Modelo comparativo de la ecuación de calor unidimensional: perspectivas deterministas y estocásticas. AlfaPublicaciones, 8(3), 43–69. <https://doi.org/10.33262/ap.v8i3.701>



ALFA PUBLICACIONES, es una revista multidisciplinar, **trimestral**, que se publicará en soporte electrónico tiene como **misión** contribuir a la formación de profesionales competentes con visión humanística y crítica que sean capaces de exponer sus resultados investigativos y científicos en la misma medida que se promueva mediante su intervención cambios positivos en la sociedad. <https://alfapublicaciones.com>

La revista es editada por la Editorial Ciencia Digital (Editorial de prestigio registrada en la Cámara Ecuatoriana de Libro con No de Afiliación 663) www.celibro.org.ec

Esta revista está protegida bajo una licencia Creative Commons Attribution Non Commercial No Derivatives 4.0 International. Copia de la licencia: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



Palabras claves:

Ecuación del calor,
ecuaciones
diferenciales
parciales,
procesos
estocásticos,
ruido blanco,
método de Monte
Carlo.

Resumen

Introducción: la incorporación de incertidumbre en los modelos de conducción de calor permite representar perturbaciones aleatorias presentes en diversos procesos físicos.

Objetivos: la presente investigación se plantea como objetivo comparar las formulaciones determinista y estocástica de la ecuación del calor unidimensional bajo ruido blanco gaussiano aditivo y analizar la influencia de la difusividad térmica en la propagación de la incertidumbre. **Metodología:** se implementó una simulación computacional validada y reproducible para ecuaciones diferenciales parciales estocásticas en el software MATLAB, considerando un modelo determinista mediante esquema de Crank- Nicolson y una formulación estocástica mediante el método Euler-Maruyama. La incertidumbre se modeló con ruido blanco gaussiano aditivo y se evaluó mediante 200 simulaciones Monte Carlo en aluminio, acero inoxidable y madera. Se emplearon como métricas el RMSE, la varianza máxima y la energía térmica promedio. **Resultados:** la media del ensamblaje Monte Carlo presentó una elevada concordancia con la solución determinista. El incremento de la intensidad del ruido aumentó la dispersión estadística, mientras que la energía térmica promedio permaneció prácticamente constante. **Conclusiones:** en conclusión, la difusividad térmica actúa como un mecanismo natural de amortiguamiento de la incertidumbre, afectando principalmente la variabilidad de la solución sin modificar significativamente la dinámica promedio del proceso difusivo. **Área de estudio general:** Matemática Aplicada. **Área de estudio específica:** Simulación computacional. **Tipo de estudio:** Artículos originales.

Keywords:

Heat equation,
partial differential
equations,
stochastic
processes,
white noise,
Monte Carlo
method.

Abstract

Introduction: the incorporation of uncertainty in heat conduction models allows us to represent random perturbations present in various physical processes. **Objectives:** the objective of this research is to compare the deterministic and stochastic formulations of the one-dimensional heat equation under additive Gaussian white noise and to analyze the influence of thermal diffusivity on the propagation of uncertainty. **Methodology:** a validated and reproducible computational simulation for stochastic partial differential equations was

implemented in the MATLAB software, considering a deterministic model using the Crank-Nicolson scheme and a stochastic formulation using the Euler-Maruyama method. Uncertainty was modeled with additive Gaussian white noise and evaluated using 200 Monte Carlo simulations in aluminum, stainless steel, and wood. RMSE, maximum variance, and average thermal energy were used as metrics. **Results:** the means of the Monte Carlo assembly showed a high agreement with the deterministic solution. The increase in noise intensity increased the statistical dispersion, while the average thermal energy remained practically constant. **Conclusions:** in conclusion, thermal diffusivity acts as a natural uncertainty dampening mechanism, mainly affecting the variability of the solution without significantly modifying the average dynamics of the diffusive process. **General area of study:** Applied Mathematics. **Specific area of study:** Computational simulation. **Type of study:** Original articles.

1. Introducción

La transferencia de calor por conducción constituye uno de los procesos físicos fundamentales en la ingeniería, debido a la participación en sistemas energéticos, procesos industriales, materiales estructurales, dispositivos electrónicos y aplicaciones de manufactura avanzada. La capacidad de describir y predecir la evolución espacial y temporal de la temperatura es esencial para el diseño eficiente de sistemas térmicos y para la evaluación del comportamiento de materiales sometidos a diferentes condiciones operativas (Bergman et al., 2019; Ghajar & Çengel, 2025).

La modelación matemática de la conducción térmica se fundamenta en la ecuación clásica del calor, derivada a partir de la ley de Fourier y del principio de conservación de la energía. En una dimensión espacial, dicha **Ecuación 1** puede expresarse como:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

Donde $u(x,t)$ = temperatura en posición x y tiempo t ; $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ = tasa de cambio de la temperatura en el tiempo; α = coeficiente de difusión térmica; $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \partial_{xx}u$ es la segunda derivada espacial, que mide la curvatura de la distribución de temperatura: Si $\partial_{xx}u > 0$ la curva es cóncava hacia arriba, es decir, existe una tendencia a aumentar. Si

$\partial_{xx}u < 0$ la curva es cóncava hacia abajo, es decir, existe una tendencia a disminuir (Anton et al., 2017).

Este parámetro relaciona la capacidad de conducción y almacenamiento de energía térmica, determinando la rapidez con que una perturbación térmica se propaga a través del medio (Evans, 2022; Bergman et al., 2019).

A pesar del amplio desarrollo teórico y numérico alcanzado por la ecuación del calor, los sistemas físicos reales se encuentran expuestos a múltiples fuentes de incertidumbre, entre las que destacan las fluctuaciones ambientales, los errores de medición, las variaciones en las propiedades de los materiales y las perturbaciones operacionales. Estas fuentes de incertidumbre limitan la capacidad predictiva de los modelos deterministas clásicos, generando discrepancias entre las predicciones teóricas y el comportamiento observado experimentalmente (Sterr et al., 2021; Li & Su, 2022; Seyer et al., 2024).

Con el propósito de incorporar dichos efectos aleatorios, durante las últimas décadas ha surgido un creciente interés por las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas (SPDE, por sus siglas en inglés), las cuales incorporan términos probabilísticos capaces de representar perturbaciones espaciales y temporales de naturaleza aleatoria. Entre ellas, la ecuación de calor estocástica constituye uno de los modelos más estudiados debido a su relevancia teórica y a sus aplicaciones en transferencia de calor, dinámica de fluidos, propagación de contaminantes, crecimiento de interfaces y fenómenos de difusión en medios aleatorios (Anton et al., 2017; Dong et al., 2025; Khattab et al., 2024; Guzmán & Alvear, 2021; Azorin & Yaulema, 2021).

Una de las formulaciones más utilizadas corresponde al caso de ruido blanco gaussiano aditivo, modelado mediante la incorporación de un proceso de Wiener (**Ecuación 2**):

$$\text{Wiener } (W(t)): \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sigma dW \quad (2)$$

donde σ representa la intensidad de las perturbaciones aleatorias. En esta formulación, el ruido actúa de forma independiente del estado térmico del sistema, introduciendo fluctuaciones externas que afectan uniformemente la dinámica de la solución (Kloeden & Platen, 1992; Lord & Tambue, 2018).

Desde el punto de vista computacional, la resolución de SPDE representa un desafío considerable debido a la coexistencia de fenómenos deterministas y aleatorios en múltiples escalas espaciales y temporales. Como consecuencia, gran parte de la investigación reciente se ha orientado al desarrollo de métodos numéricos robustos que garanticen estabilidad, convergencia y precisión estadística (Esmaeilbeigi et al., 2019).

Entre los enfoques más utilizados destacan los métodos de diferencias finitas, elementos finitos, técnicas espectrales y formulaciones híbridas adaptadas a la naturaleza probabilística de las SPDE (Anton et al., 2017; Dong et al., 2025).

Para la discretización del término difusivo, el esquema implícito de Crank-Nicolson continúa siendo una de las estrategias más empleadas debido a su estabilidad y precisión de segundo orden en espacio y tiempo (Crank & Nicolson, 1947). Por otra parte, la discretización del término estocástico suele realizarse mediante el método de Euler-

Maruyama, considerado la extensión natural del método de Euler para ecuaciones diferenciales estocásticas y ampliamente utilizado para la aproximación de integrales de Itô (Kloeden & Platen, 1992; Bogoi et al., 2023).

Asimismo, la cuantificación de la incertidumbre asociada a las soluciones estocásticas requiere procedimientos estadísticos capaces de caracterizar la variabilidad introducida por el ruido. Entre las metodologías más empleadas destaca la simulación Monte Carlo, la cual permite generar múltiples realizaciones independientes del proceso aleatorio para estimar métricas estadísticas, tales como la media del ensamblaje, la varianza espacial y el error respecto a una solución determinista de referencia (Sterr et al., 2021; Zhang & Li, 2023).

Investigaciones recientes han profundizado en el desarrollo de esquemas numéricos estructuralmente conservativos y técnicas orientadas a reducir el costo computacional de las SPDE. Dong et al. (2025) desarrollaron un enfoque de diferencias finitas de orden reducido para ecuaciones semilineales impulsadas por ruido blanco, mientras que Khattab et al. (2024) exploraron el uso de transformadas rápidas de Fourier para acelerar la resolución de ecuaciones de calor estocásticas. Asimismo, Cîmpean et al. (2026) analizaron propiedades asintóticas de soluciones asociadas a ecuaciones de calor semilineales.

Sin embargo, la mayoría de estas investigaciones se concentra en aspectos teóricos relacionados con la convergencia, la estabilidad o la preservación estructural de los métodos numéricos, sin profundizar en la influencia que ejercen las propiedades físicas de los materiales sobre la propagación de la incertidumbre térmica. De forma paralela, los estudios aplicados de transferencia de calor bajo incertidumbre suelen orientarse hacia sistemas complejos, micro canales o medios radiactivos (Li & Su, 2022; Sterr et al., 2021; Seyer et al., 2024), existiendo un número limitado de investigaciones dedicadas a cuantificar comparativamente el efecto de la difusividad térmica sobre la respuesta estadística de modelos estocásticos unidimensionales (Navas et al., 2022; Elizalde et al., 2024; Benítez et al., 2025).

Esta brecha resulta particularmente relevante debido a que la difusividad térmica no solo regula la velocidad de disipación del calor, sino también la capacidad del material para amortiguar las fluctuaciones inducidas por perturbaciones aleatorias (Adamowicz, 2022). En consecuencia, la caracterización cuantitativa de la relación entre las propiedades térmicas del material y la propagación de la incertidumbre constituye un problema de interés tanto científico como ingenieril. En particular, existe una limitada evidencia cuantitativa sobre la influencia de la difusividad térmica en la propagación de la incertidumbre en modelos unidimensionales de conducción de calor sujetos a ruido blanco gaussiano aditivo, lo que dificulta comprender el papel de las propiedades físicas del material en la respuesta estadística del sistema.

A diferencia de estudios centrados en el desarrollo de nuevos esquemas numéricos para ecuaciones del calor estocásticas, este trabajo cuantifica comparativamente el efecto de

la difusividad térmica sobre la propagación de la incertidumbre bajo ruido blanco gaussiano aditivo. En este contexto, el presente trabajo desarrolla un análisis numérico comparativo de la ecuación de calor unidimensional bajo dos escenarios: un modelo determinista clásico y un modelo estocástico con ruido blanco gaussiano aditivo. La comparación se realiza considerando materiales con diferentes coeficientes de difusividad térmica (aluminio, acero inoxidable y madera) y distintos niveles de intensidad del ruido, con el propósito de analizar cómo las propiedades térmicas influyen en la propagación de la incertidumbre.

La investigación se fundamenta en la hipótesis de que la incorporación de perturbaciones estocásticas incrementa la dispersión estadística de la solución térmica respecto al modelo determinista y que este efecto depende de la difusividad térmica del material, siendo más pronunciado en materiales con menor capacidad de disipación.

Para contrastar esta hipótesis, se emplea una metodología basada en diferencias finitas, discretización de Crank-Nicolson para el término difusivo, integración estocástica mediante el método de Euler-Maruyama y simulaciones Monte Carlo para la cuantificación de la incertidumbre.

Por consiguiente, el objetivo de la investigación es comparar las formulaciones determinista y estocástica con ruido blanco gaussiano aditivo de la ecuación del calor unidimensional mediante simulación numérica, evaluando su efecto sobre métricas de error, energía y variabilidad estadística en materiales con diferentes propiedades de difusión térmica. Los resultados obtenidos aportan evidencia cuantitativa sobre el papel de la incertidumbre en los procesos de conducción de calor y contribuyen al desarrollo de metodologías de simulación estocástica aplicables a problemas de ingeniería térmica y modelación matemática bajo incertidumbre.

2. Metodología

La presente investigación se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo de nivel explicativo y comparativo, mediante un diseño cuasi – experimental computacional orientado al análisis de propagación de incertidumbre en sistemas de conducción térmica unidimensional.

Este diseño fue seleccionado debido a que permite manipular de forma controlada variables físicas y estocásticas, evaluando su influencia sobre la estabilidad, dispersión y capacidad predictiva de soluciones numéricas sujetas a perturbaciones aleatorias.

Asimismo, el estudio se clasifica como una investigación aplicada de simulación numérica, ya que emplea modelos matemáticos y algoritmos computacionales para reproducir fenómenos físicos de transferencia de calor bajo condiciones controladas de incertidumbre permitiendo analizar escenarios cuya validación experimental resulta compleja o costosa.

La investigación se estructuró mediante dos escenarios experimentales: modelo determinista de referencia y modelo estocástico con ruido blanco.

Como variables independientes se definieron la intensidad del ruido estocástico (σ), la perturbación aleatoria y la difusividad térmica del material (α). Las variables dependientes evaluadas incluyeron el Error Cuadrático Medio (RMSE) espacio – temporal, la varianza espacial, el coeficiente de variación, la energía térmica discreta y la estabilidad numérica temporal. El RMSE se calculó mediante la expresión (**Ecuación 3**):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (u_i - u_i^{ref})^2} \quad (3)$$

donde N_x representa el número de nodos espaciales, u_i representa la solución estocástica promedio y u_i^{ref} la solución determinista de referencia (Villasante et al., 2025). Por su parte, la energía térmica del sistema se evaluó mediante la integral (**Ecuación 4**):

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (4)$$

cuya aproximación se efectuó utilizando la integración discreta sobre la malla espacial (Li & Su, 2022).

2.1. Población de estudio, muestra y criterios de selección

En el contexto físico-computacional del estudio, la población estuvo conformada por materiales sólidos isotrópicos susceptibles de ser modelados mediante conducción térmica unidimensional. Se empleó un muestreo intencional no probabilístico, seleccionando tres materiales con capacidades difusivas contrastantes: aluminio (alta difusividad), acero inoxidable (difusividad media) y madera (baja difusividad) (Bergman et al., 2019). La selección de estos materiales permitió cubrir distintos regímenes de propagación térmica, favoreciendo el análisis comparativo del efecto de las perturbaciones estocásticas sobre materiales con velocidades de difusión contrastantes. Los criterios de inclusión exigieron propiedades térmicas constantes, isotropía material, comportamiento lineal de conducción y ausencia de cambios de fase en el rango analizado. Se excluyeron sistemáticamente materiales anisótropos, medios no homogéneos y sistemas con dependencia no lineal de la temperatura.

Para el análisis estadístico del comportamiento estocástico, la muestra computacional se definieron 200 simulaciones independientes de Monte Carlo por cada configuración experimental. Este tamaño muestral se determinó tras pruebas piloto que confirmaron la estabilización estadística de la media del ensamblaje, la varianza y la convergencia del RMSE. Al fundamentarse exclusivamente en simulaciones numéricas, esta investigación no involucra seres humanos ni animales, prescindiendo de la aprobación de un comité de ética y del consentimiento informado.

2.2. Modelo matemático

El fenómeno de transferencia de calor se modeló sobre una barra unidimensional de longitud L , donde la variable espacial x representa la posición a lo largo del dominio físico y satisface $x \in [0, L]$. Para ello, se parte de la **Ecuación 5** clásica unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

donde $u(x, t)$ representa la temperatura espacial y temporal (Anton et al., 2017). Para incorporar la incertidumbre térmica se introdujo un proceso de Wiener $W(t)$ representada matemáticamente como la acción del ruido blanco integrado en el tiempo.

El modelo principal, fundamentado con ruido aditivo, se define como **Ecuación 6**:

$$du = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \sigma dW \quad (6)$$

Sujeto a: $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = u_0(x)$, donde σ controla la intensidad de las fluctuaciones aleatorias (Lord & Tambue, 2018).

2.3. Dominio computacional y discretización numérica

El dominio espacial se limitó a $x \in [0, 1]$ y el intervalo temporal a $t \in [0, 0.5]$. Para observar los procesos de disipación se definió una condición inicial de perfil gaussiano suave $u(x, 0) = \exp(-50(x - 0.5)^2)$, sujeto a condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas ($u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$) para garantizar la estabilidad física del sistema. La discretización espacial se realizó mediante diferencias finitas centrales de segundo orden sobre una malla uniforme $\Delta x = 10^{-2}$ (LeVeque, 2007). El sistema determinista se resolvió empleando el esquema implícito de Crank – Nicolson debido a su estabilidad incondicional y adecuada conservación energética (Crank & Nicolson, 1947). En contraste, la discretización temporal de los modelos estocásticos se efectuó mediante el método de Euler – Maruyama. El esquema iterativo se estructuró bajo la perspectiva de Lord & Tambue (2018), como **Ecuación 7**:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t A_h U^n + \sigma \Delta W_n \quad (7)$$

Los incrementos del proceso de Wiener se aproximaron mediante $\Delta W_n \approx \sqrt{\Delta t} \eta_n$, donde $\eta_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, esto es consistente con la definición probabilística del proceso de Wiener y constituye la base del método de Euler – Maruyama (Kloeden & Platen, 1992). Aunque el esquema de Crank-Nicolson es incondicionalmente estable, se seleccionó un paso temporal de $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ para asegurar una adecuada resolución de las fluctuaciones estocásticas y reducir los errores de discretización temporal.

2.4. Resolución numérica del modelo

Lord & Tambue (2018) recomienda la integración temporal del modelo estocástico, se realizó mediante el esquema semi implícito de Euler – Maruyama implementado en la función: `solver_stochastic_EM.m`. El esquema numérico empleado puede expresarse como **Ecuación 8**:

$$U^{\{n+1\}} = (I - \Delta t A_h)^{-1} (U^n + \mathcal{G}(U^n) \Delta W_n) \quad (8)$$

Los incrementos de Wiener fueron generados mediante $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, utilizando variables gaussianas independientes. Para el caso del ruido aditivo, el término estocástico implementado fue $\mathcal{G}(U^n) \Delta W_n = \sigma \Delta W_n$. La resolución matricial del sistema lineal se optimizó mediante factorización LU pre computada (Ermakov & Smilovitsky, 2021), reduciendo significativamente el costo computacional durante las simulaciones Monte Carlo.

2.5. Arquitectura computacional y secuencialidad de la simulación

La arquitectura computacional fue implementada de forma modular en MATLAB para garantizar reproducibilidad, trazabilidad experimental y separación funcional entre discretización, resolución numérica y análisis estadístico.

La simulación completa fue controlada mediante el script principal: *run_all.m*; encargado de controlar todas las etapas del experimento computacional. Este archivo como núcleo de la simulación, ejecutando de forma secuencial la carga de parámetros, construcción de la malla, generación de condiciones iniciales, resolución de los modelos determinista y estocástico, ejecución de los experimentos Monte Carlo y almacenamiento de resultados. La simulación inicia con la definición del conjunto de materiales de estudio, incluyendo aluminio, acero inoxidable y madera. Para cada material se ejecuta automáticamente el archivo *params.m*, donde se incorporan las propiedades físicas del medio, tales como: conductividad térmica (κ), densidad (ρ) y calor específico (c_p) (Bergman et al., 2019). A partir de estos parámetros se calcula α la difusividad térmica mediante **Ecuación 9**:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p} \quad (9)$$

Asimismo, en este archivo se definen todos los parámetros globales del experimento, incluyendo la longitud del dominio (L), el tiempo final de la simulación (T), los tamaños de discretización espacial y temporal (Δx y Δt), el conjunto de intensidades de ruido estudiadas (σ), el número de realizaciones de Monte Carlo (N_{MC}), las semillas de reproducibilidad, los criterios de almacenamiento de resultados y las opciones de validación numérica.

Una vez definidos los parámetros globales, el script *build_grid.m* construye la malla espacio-temporal uniforme utilizado por todos los experimentos. Este procedimiento discretiza el dominio espacial ($x[0, L]$) y el intervalo temporal ($t[0, T]$), generando una estructura de datos que contiene vectores espaciales y temporales, el número total de nodos (N_x), el número de pasos temporales (N_t), los índices interiores y la información necesaria para aplicar las condiciones de contorno.

Posteriormente, la función *init_condition.m* general la distribución térmica inicial utilizada en simulaciones. En el presente estudio se empleó un perfil gaussiano centrado en el dominio: $A \exp[-\beta(x - x_0)^2]$, donde (A) representa la amplitud inicial, β controla el ancho de la distribución y $x - x_0$ determina la ubicación del máximo térmico. Simultáneamente se imponen las condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, fijando la temperatura en ambos extremos de la barra.

A continuación, el archivo *assemble_Ah.m* construye el operador Laplaciano discreto asociado a la segunda derivada espacial mediante diferencias finitas centrales de segundo orden. Este procedimiento genera una matriz tridiagonal dispersa que representa el operador de difusión térmica discretizado y constituye el núcleo algebraico utilizado tanto por el modelo determinista como por el estocástico.

Una vez ensamblado el operador espacial, el problema determinista es resuelto mediante la función *solver_deterministic_CN.m* la cual implementa el esquema implícito de Crank-Nicolson para la ecuación de conducción de calor.

La solución obtenida constituye la referencia numérica frente a la cual posteriormente se comparan los resultados estocásticos. Durante este proceso se calculan métricas asociadas a la evolución temporal de la energía, amplitud máxima y estabilidad de la solución.

Finalizada la simulación determinista, se ejecuta el procedimiento Monte Carlo mediante la función *montecarlo_runner.m*. Este módulo coordina la generación de múltiples trayectorias independientes del modelo estocástico para cada intensidad de ruido considerada. Con el objetivo de garantizar independencia estadística, cada realización utiliza una semilla distinta derivada de una semilla maestra definida previamente en el archivo de parámetros.

Cada trayectoria individual es resuelta mediante la función *solver_stochastic_EM.m*, la cual implementa un esquema Euler – Maruyama implícito para la ecuación de calor estocástica. El código permite analizar la formulación de incertidumbre: ruido aditivo, donde (dW) representa los incrementos discretos del proceso de Wiener aproximados mediante variables aleatorias gaussianas independientes.

Durante la ejecución Monte Carlo se implementa internamente el algoritmo de Welford, el cual permite calcular de manera incremental y numéricamente estable la media y la varianza del ensamblaje si necesidad de almacenar simultáneamente todas las realizaciones generadas. Este procedimiento reduce significativamente el consumo de memoria y minimiza errores de redondeo asociados a la acumulación masiva de datos (Welford, 1962).

A partir de las realizaciones obtenidas se calculan diversas métricas estadísticas de interés, incluyendo la media espacio – temporal, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de variación, los intervalos de confianza del 95 %, la energía térmica promedio y el Error Cuadrático Medio (RMSE) respecto a la solución determinista.

El análisis posterior de resultados se realiza mediante el módulo *postprocess_plot.m*, encargado de generar perfiles especiales, mapas de calor espacio – temporales, curvas de evolución energética y representaciones gráficas de bandas de incertidumbre asociadas a las simulaciones estocásticas.

Paralelamente al flujo principal de simulación, se desarrolló una segunda cadena computacional destinada exclusivamente a la validación matemática y estadística del modelo. Esta etapa es coordinada por el script *run_all_validation.m* encargado de ejecutar automáticamente todos los estudios de convergencia y consistencia numérica utilizados para verificar la fiabilidad de los resultados reportados. La validación se organiza en varias etapas secuenciales, detalladas a continuación:

La primera etapa consiste en la validación determinista mediante solución exacta, la cual, consiste en verificar el correcto funcionamiento del esquema de Crank – Nicolson implementado en *solver_deterministic_CN.m*. Para ello se utiliza el script

validation_deterministic.m, el cual reemplaza la condición inicial gaussina con una condición inicial senoidal $u(x, 0) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ debido a que esta formulación posee una solución analítica conocida para la ecuación clásica del calor (Evans, 2022).

La solución exacta se obtiene mediante la función *exact_solution_heat.m*, la cual implementa **Ecuación 10**:

$$u(x, t) = A \exp\left[-\alpha \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

Esta solución se evalúa sobre la misma malla espacio- temporal utilizada para el solver numérico (Ogethakpo & Nkonyeasaya, 2025).

Posteriormente se calcula la diferencia entre la solución exacta y la solución numérica obtenida mediante Crank-Nicolson, determinándose: Error absoluto, Error máximo, Norma L_2 y Error relativo. Esta comparación constituye la primera evidencia de consistencia matemática del esquema implementado.

La segunda etapa consiste en el estudio de convergencia espacial, una vez validado el solver determinista el script *study_spatial_convergence.m* analiza el comportamiento del error al refinar progresivamente la discretización espacial. Para ello, se ejecutan múltiples simulaciones utilizando distintos tamaños de malla: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$. Para cada discretización se calcula el error respecto a la solución exacta y posteriormente se estima el orden experimental de convergencia: $e_h = Ch^p$, donde p representa el orden espacial observado. El objetivo es verificar que el esquema de diferencias finitas centrales reproduce el comportamiento teórico de segundo orden: $p \approx 2$.

Posteriormente, la segunda validación numérica es ejecutada mediante *study_temporal_convergence.m*, en este procedimiento se mantiene fija la discretización espacial y se realizan simulaciones utilizando distintos valores de Δt . Para cada caso se calcula nuevamente el error frente a la solución analítica y se estima el orden temporal $e_{\Delta t} = C(\Delta t)^q$. El objetivo es verificar experimentalmente que el esquema de Crank-Nicolson presenta convergencia temporal de segundo orden: $q \approx 2$ (Crank & Nicolson, 1947).

A continuación, se realiza la validación estocástica del modelo de ruido blanco que es evaluada mediante el script *study_stochastic_validation.m*. En esta etapa se generan múltiples realizaciones independientes de la ecuación de calor estocástica utilizando el esquema Euler – Maruyama. El análisis permite verificar estabilidad estadística de la media; crecimiento esperado de la varianza; comportamiento de la energía térmica promedio; ausencia de trayectorias numéricamente divergentes y consistencia de los intervalos de confianza. Esta prueba constituye una validación empírica del comportamiento probabilístico del modelo.

La convergencia fuerte y convergencia débil se analiza en el *script study_strong_weak_convergence.m* evalúa los órdenes de convergencia característicos del método de Euler – Maruyama. Para ello se comparan simulaciones realizadas con

distintos pasos temporales utilizando trayectorias de Wiener consistente entre mallas (Bayer et al., 2024).

Se calcula el error fuerte $E[|X(T) - X_h(T)|]$, y el error débil $|E[X(T)] - E[X_h(T)]|$. La teoría predice $Error\ fuerte = O(\Delta t^{\frac{1}{2}})$ y $Error\ debil = O(\Delta t)$, por lo que la validación busca verificar experimentalmente dichas tasas de convergencia (Higham, 2001).

La estabilidad estadística del ensamblaje es estudiada mediante *study_MC_convergence.m*. Se realizan simulaciones utilizando diferentes cantidades de realizaciones. $N_{MC} = 50, 100, 200, 500, 1000, \dots$. Analizando la evolución de la media muestral, varianza, RMSE e intervalos de confianza. Teóricamente, el error Monte Carlo debe disminuir como $O(N_{MC}^{-\frac{1}{2}})$, por lo que esta prueba permite justificar el tamaño muestral seleccionado para el estudio (Kroese et al., 2011).

El script *study_confidence_intervals.m* evalúa la evolución de los intervalos de confianza del 95 % obtenidos a partir de las simulaciones Monte Carlo. Se verifica que el aumento del número de realizaciones produce una reducción progresiva de la incertidumbre estadística estimada, confirmando la estabilidad del ensamblaje.

El análisis paramétrico es realizado mediante *study_sigma_sensitivity.m*. En esta etapa se consideran distintos valores de: σ , con el propósito de cuantificar cómo las perturbaciones aleatorias modifican: RMSE, varianza, energía térmica y amplitud máxima. Asimismo, se verifican experimentalmente las leyes de escala $RMSE \propto \sigma$ y $Var(u) \propto \sigma^2$ predichas por la teoría para perturbaciones gaussianas de baja intensidad (Lord & Tambue, 2018).

La función *study_energy_evolution.m* analiza la evolución temporal de la energía térmica como **Ecuación 11**:

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx \quad (11)$$

Comparando el comportamiento determinista y estocástico para diferentes intensidades de ruido (Li & Su, 2022). Esta prueba permite evaluar la capacidad disipativa del sistema y detectar posibles anomalías numéricas.

Para analizar los perfiles medios y perfiles de varianza, se utilizan los scripts *study_mean_profiles.m* y *study_variance_profiles.m* que calculan respectivamente $\bar{u}(x, T)$ y $Var[u(x, T)]$ sobre todo el dominio espacial. Estos perfiles permiten visualizar la distribución espacial de la incertidumbre y comparar como diferentes niveles de ruido modifican la respuesta térmica promedio.

Finalmente, para el análisis de gaussianidad se utiliza el script *study_gaussianity.m* que analiza la distribución estadística de la temperatura en puntos específicos del dominio. Para ello se calculan: asimetría (skewness) y curtosis (kurtosis) (Rice, 2007).

2.6. Reproducibilidad computacional

Con el propósito de garantizar la reproducibilidad de los experimentos numéricos, todas las simulaciones fueron implementadas en MATLAB mediante una arquitectura modular basada en scripts y funciones independientes. La generación de números aleatorios se controló mediante semillas maestras predefinidas, permitiendo replicar exactamente las trayectorias estocásticas y los resultados estadísticos obtenidos.

Los parámetros físicos, numéricos y computacionales empleados en cada experimento fueron almacenados automáticamente junto con los resultados generados, incluyendo las propiedades térmicas del material, la intensidad del ruido, el tamaño de la malla espacio-temporal y el número de realizaciones Monte Carlo.

Asimismo, la estructura modular del código permite la validación independiente de cada componente del modelo, favoreciendo la trazabilidad de los resultados y facilitando la extensión futura del marco computacional hacia otros problemas de difusión bajo incertidumbre.

La simulación es de manejo público, adjunto en el siguiente link de GitHub: <https://github.com/Bri-commits/deterministic-vs-stochastic-heat-equation-1d>

3. Resultados

Los experimentos numéricos se realizaron para la ecuación del calor unidimensional bajo formulaciones deterministas y estocásticas, considerando tres materiales con propiedades difusivas contrastantes: aluminio ($\alpha = 8,44 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$), acero inoxidable ($\alpha = 3,75 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), y madera ($\alpha = 1,45 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$).

Las simulaciones se desarrollaron bajo las condiciones indicadas en la metodología con $\Delta = 0.01$; $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$; $T = 0.5$ y $N_{MC} = 200$ realizaciones independientes para el análisis estocástico. El término aleatorio se modeló exclusivamente mediante ruido blanco gaussiano aditivo, con intensidades comprendidas entre $\sigma = 0.01$ y $\sigma = 0.50$.

3.1. Validación del modelo determinista y comportamiento difusivo

La solución determinista obtenida mediante el esquema implícito de Crank–Nicolson presentó un comportamiento estable para los tres materiales analizados, sin evidenciar oscilaciones espurias ni inestabilidades numéricas. Aunque este método es incondicionalmente estable, se mantuvo constante la relación $\Delta t / \Delta x^2 = 0.5$ con el propósito de asegurar una resolución temporal homogénea en todos los experimentos.

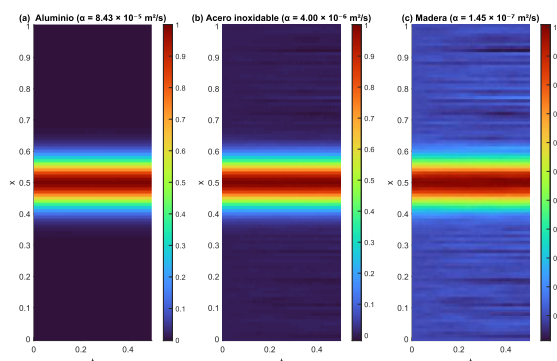
La evolución de la energía térmica mostró una disipación consistente con la difusividad de cada material. El aluminio presentó la mayor reducción relativa de energía, con una razón entre la energía final e inicial de 0,9836, mientras que el acero inoxidable y la madera registraron valores de 0,9993 y 0,9999, respectivamente.

Estos resultados confirman que los materiales de alta difusividad redistribuyen el calor con mayor rapidez, favoreciendo la disipación energética del sistema. En contraste, los materiales de baja difusividad conservan gradientes térmicos más pronunciados durante el intervalo de simulación considerado.

Como se muestra en la **Figura 1**, los mapas espacio-temporales de temperatura preservan la simetría de la condición inicial gaussiana y reproducen el comportamiento físico esperado del proceso difusivo.

Figura 1

Mapas térmicos espacio – temporales de la solución determinista



Nota. Los materiales utilizados fueron aluminio, acero inoxidable y madera. La condición inicial gaussiana evoluciona bajo condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, evidenciando una disipación térmica dependiente de la difusividad del material. El aluminio presenta una rápida redistribución del calor, mientras que la madera conserva gradientes térmicos más pronunciados debido a su menor capacidad difusiva. La evolución temporal es moderada debido al intervalo de simulación considerado ($T=0.5$).

3.2. Influencia de la difusividad térmica en la propagación de la incertidumbre

La incorporación de ruido blanco generó un incremento progresivo de la dispersión estadística, cuya magnitud dependió simultáneamente de la intensidad de la perturbación y de la difusividad térmica del material.

La **Tabla 1** resume las métricas globales obtenidas para $\sigma=0.50$, correspondiente al escenario de máxima perturbación analizado.

Tabla 1

Comparación del RMSE, varianza máxima y energía térmica final para $\sigma=0,50$

Material	RMSE	Varianza máxima	Energía final
Aluminio	$1,80 \times 10^{-2}$	$9,25 \times 10^{-2}$	$8,90 \times 10^{-2}$
Acero inoxidable	$2,53 \times 10^{-2}$	$1,56 \times 10^{-1}$	$9,04 \times 10^{-2}$
Madera	$2,58 \times 10^{-2}$	$1,61 \times 10^{-1}$	$8,95 \times 10^{-2}$

Nota. El RMSE se calculó respecto a la solución determinista de referencia.

Los resultados muestran diferencias significativas entre los materiales estudiados. El aluminio presentó los menores niveles de dispersión estadística, registrando una varianza máxima de $9,25 \times 10^{-2}$ y un RMSE de $1,80 \times 10^{-2}$. Por el contrario, la madera alcanzó

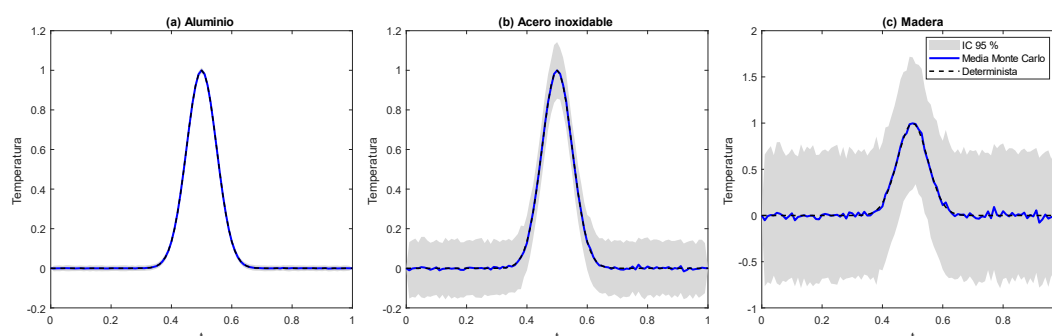
la mayor amplificación de incertidumbre, con una varianza máxima de $1,61 \times 10^{-1}$ y un RMSE de $2,58 \times 10^{-2}$. El acero inoxidable exhibió un comportamiento intermedio, coherente con su difusividad térmica moderada.

A pesar del incremento de la dispersión estadística, la energía térmica final permaneció prácticamente constante para los tres materiales, con variaciones inferiores al 2 % respecto al caso determinista. Este resultado indica que el ruido blanco aditivo modifica principalmente la distribución espacial de la temperatura y la variabilidad de las trayectorias, sin alterar significativamente el balance energético global del sistema.

Como se observa en la **Figura 2**, la incertidumbre asociada a la solución estocástica se manifiesta mediante el ensanchamiento progresivo de los intervalos de confianza alrededor de la media Monte Carlo.

Figura 2

Media del ensamblaje Monte Carlo e intervalos de confianza del 95 % para ruido aditivo



Nota. La línea continua representa la temperatura promedio obtenida a partir de 200 realizaciones independientes de Monte Carlo, mientras que la región sombreada indica el intervalo de confianza del 95 %. La solución determinista de referencia se muestra para comparación. Se observa una ampliación progresiva de las bandas de incertidumbre conforme disminuye la difusividad térmica del material.

La **Figura 2** muestra que el ancho de las bandas de incertidumbre aumenta conforme disminuye la difusividad térmica del material. En el caso del aluminio, las fluctuaciones permanecen relativamente acotadas durante toda la simulación, reflejando una elevada capacidad de disipación de las perturbaciones aleatorias. Por el contrario, la madera presenta bandas considerablemente más amplias, evidenciando una mayor sensibilidad a la acción acumulativa del ruido blanco.

3.3. Análisis de sensibilidad paramétrica respecto a la intensidad del ruido

El incremento de la intensidad de las perturbaciones generó un crecimiento aproximadamente lineal tanto del RMSE como de la varianza máxima para los tres materiales estudiados.

En el caso del aluminio, el RMSE aumentó desde $3,61 \times 10^{-4}$ para $\sigma=0.01$ hasta $1,80 \times 10^{-2}$ para $\sigma=0.50$. De manera similar, el acero inoxidable presentó un incremento

desde $5,06 \times 10^{-4}$ hasta $2,53 \times 10^{-2}$, mientras que la madera registró un aumento desde $5,16 \times 10^{-4}$ hasta $2,58 \times 10^{-2}$.

La varianza máxima mostró una dependencia aproximadamente cuadrática respecto a la intensidad del ruido, consiste con la naturaleza del término estocástico. Para $\sigma=0.01$, los valores de varianza máxima fueron 3.70×10^{-5} , 6.23×10^{-5} y 6.44×10^{-5} para aluminio, acero inoxidable y madera, respectivamente. En el escenario de máxima perturbación ($\sigma=0.50$), estos valores aumentaron hasta $9,25 \times 10^{-2}$, $1,56 \times 10^{-1}$ y $1,61 \times 10^{-1}$.

El análisis de regresión lineal evidenció una relación prácticamente perfecta entre la intensidad del ruido y el RMSE, con coeficientes de correlación cercanos a 1,00 para los tres materiales. Las pendientes de sensibilidad obtenidas fueron $3,61 \times 10^{-2}$ para el aluminio, $5,06 \times 10^{-2}$ para el acero inoxidable y $5,16 \times 10^{-2}$ para la madera, indicando una mayor sensibilidad de los materiales de baja difusividad frente a incrementos en la intensidad de las perturbaciones.

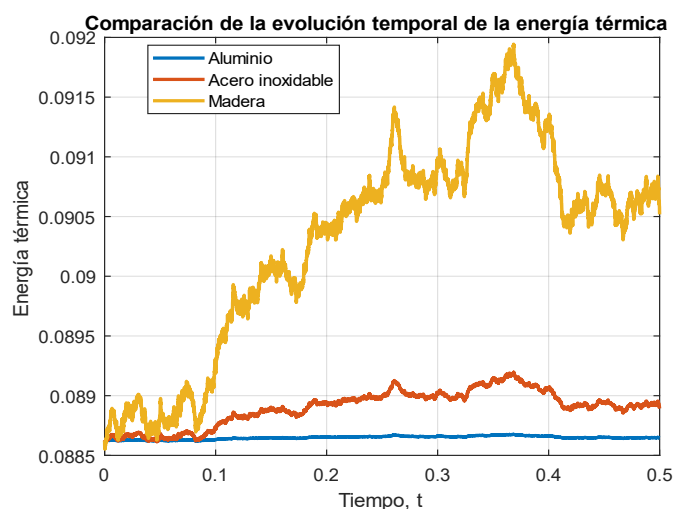
A pesar del aumento de la dispersión estadística, la energía térmica final permaneció prácticamente constante en todos los escenarios, con variaciones inferiores al 3 % respecto al caso determinista. Este resultado demuestra que el ruido blanco gaussiano modifica principalmente la variabilidad de las trayectorias individuales, sin alterar de forma significativa la dinámica energética global del sistema.

3.4. Influencia de la difusividad térmica sobre la energía térmica promedio

Además de las métricas de dispersión estadística, se analizó la evolución temporal de la energía térmica promedio, la cual permite evaluar el efecto global de las perturbaciones aleatorias sobre el contenido energético del sistema.

Figura 3

Comparación temporal de la energía térmica promedio para los materiales analizados bajo ruido blanco aditivo



Nota. La energía térmica se calculó a partir de la media del ensamblaje Monte Carlo para $\sigma=0.50$.

Como se observa en la **Figura 3**, la energía térmica permaneció acotada durante todo el intervalo de simulación para los tres materiales estudiados. No obstante, la magnitud de las fluctuaciones energéticas presentó diferencias apreciables asociadas a la difusividad térmica de cada material.

La madera exhibió las mayores variaciones temporales, alcanzando niveles energéticos superiores a los observados en aluminio y acero inoxidable. Por el contrario, el aluminio mostró una evolución considerablemente más estable, con oscilaciones de baja amplitud alrededor de un valor medio prácticamente constante.

Estos resultados son consistentes con el comportamiento observado en las métricas de varianza y RMSE presentadas en la **Tabla 1**. Los materiales con mayor difusividad térmica redistribuyen con mayor rapidez las perturbaciones introducidas por el término estocástico, reduciendo la acumulación local de energía asociada a las fluctuaciones aleatorias. En contraste, los materiales menos difusivos presentan una mayor persistencia de dichas perturbaciones, lo que se traduce en una respuesta energética más variable.

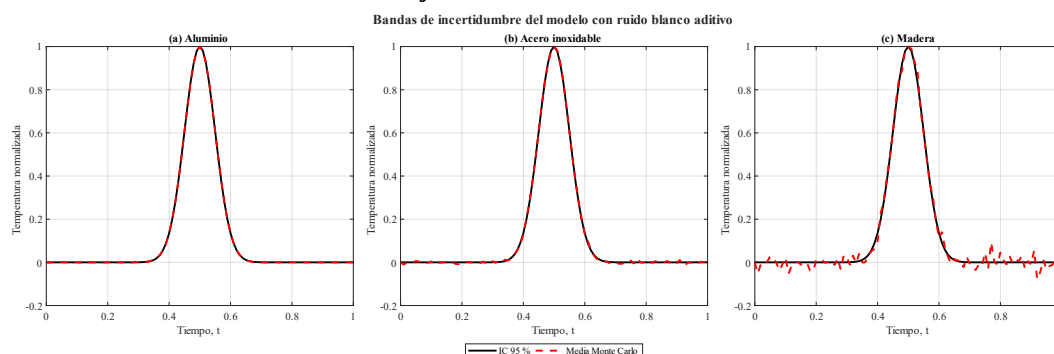
A pesar de estas diferencias, la energía térmica promedio permaneció dentro de un rango relativamente estrecho durante toda la simulación, indicando que el ruido blanco aditivo modifica principalmente la variabilidad estadística de las trayectorias térmicas sin alterar significativamente la estabilidad energética global del sistema.

3.5. Comparación entre la solución determinista y la respuesta estocástica promedio

Con el propósito de evaluar el efecto global de las perturbaciones aleatorias sobre la dinámica térmica, se comparó la solución determinista de referencia con la media estadística obtenida mediante simulación Monte Carlo.

Figura 4

Comparación entre la solución determinista y la media del ensamblaje Monte Carlo bajo ruido blanco aditivo



Nota. La línea continua representa la solución determinista obtenida mediante Crank–Nicolson, mientras que la línea discontinua corresponde a la media del ensamblaje Monte Carlo.

La **Figura 4** muestra una elevada concordancia entre la solución determinista y la media estocástica para los tres materiales analizados. Las diferencias observadas son relativamente pequeñas en comparación con la amplitud total del campo térmico, lo que indica que el ruido blanco aditivo no altera la dinámica promedio del fenómeno difusivo.

No obstante, la magnitud de las desviaciones aumenta ligeramente conforme disminuye la difusividad térmica, siendo más evidente en la madera. Este comportamiento coincide con los valores de RMSE reportados en la **Tabla 1** y confirma que los materiales menos difusivos presentan una mayor susceptibilidad frente a perturbaciones aleatorias.

En conjunto, los resultados obtenidos evidencian que la incertidumbre inducida por el ruido blanco afecta principalmente la dispersión estadística de las trayectorias térmicas, mientras que la evolución promedio del sistema permanece cercana a la solución determinista. Esto sugiere que la principal consecuencia de la incertidumbre no radica en modificar la tendencia global del proceso de difusión, sino en incrementar la variabilidad asociada a las predicciones térmicas.

3.6. Validación numérica de las aproximaciones estocásticas

Las simulaciones se complementaron con pruebas de validación orientadas a verificar la consistencia numérica y estadística del modelo implementado. Para ello, se evaluaron la convergencia espacial y temporal del esquema de Crank–Nicolson, la convergencia fuerte y débil del método de Euler–Maruyama, la estabilidad del ensamblaje Monte Carlo y la consistencia probabilística del ruido blanco aditivo exponiendo en la **Tabla 2** el valor teórico, el valor experimental y el error relativo existente.

Tabla 2

Resultados de la validación numérica de los esquemas determinista y estocástico

Análisis	Método numérico	Valor teórico	Valor experimental	Error relativo (%)
Convergencia espacial	Crank–Nicolson	2,0	2,0004	0,02
Convergencia temporal	Crank–Nicolson	2,0	2,2067	10,33
Convergencia fuerte	Euler–Maruyama	0,5	0,4356	12,88
Convergencia débil	Euler–Maruyama	1,0	0,9909	0,91
Convergencia Monte Carlo	Muestreo Monte Carlo	$O\left(N_{MC}^{-\frac{1}{2}}\right)$	Verificada para $N_{MC} = 200$	—
Gaussianidad	Ruido blanco aditivo	Asimetría = 0; Curtosis = 3	Asimetría = 0,0828; Curtosis = 2,7962	—

Nota. El RMSE se calculó respecto a la solución determinista de referencia. Los órdenes teóricos corresponden a los resultados clásicos reportados para los esquemas de Crank–Nicolson y Euler–Maruyama en la literatura especializada. Las propiedades de gaussianidad se evaluaron respecto a los valores teóricos de asimetría nula y curtosis igual a tres.

La estabilización de las métricas estadísticas a partir de $N_{MC} = 200$ realizaciones confirmó la suficiencia del tamaño muestral empleado, mientras que la evolución del RMSE presentó una tendencia convergente acorde con la tasa teórica $O\left(N_{MC}^{-\frac{1}{2}}\right)$.

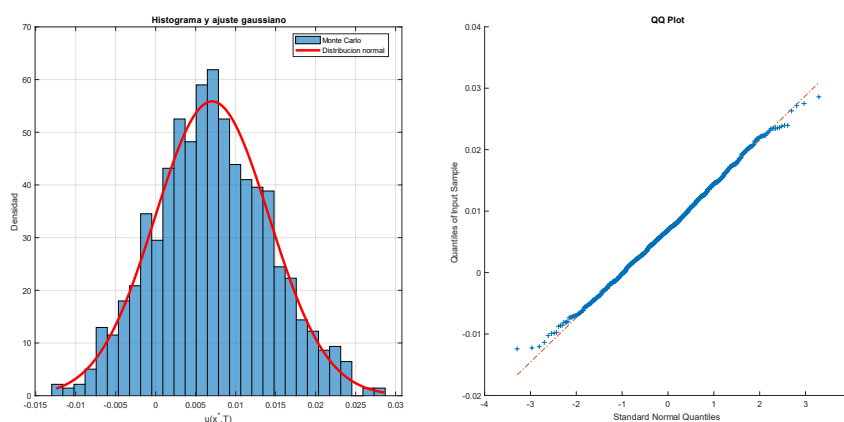
Los análisis de convergencia espacial y temporal expuestos en la **Tabla 2**, evidenciaron órdenes experimentales de 2,0004 y 2,2067, respectivamente, en concordancia con el comportamiento teórico de segundo orden del esquema de Crank–Nicolson. Asimismo, el método de Euler–Maruyama alcanzó órdenes experimentales de 0,4356 para la convergencia fuerte y de 0,9909 para la convergencia débil, próximos a los valores teóricos de $O(\Delta t^{\frac{1}{2}})$ y $O(\Delta t)$.

La ligera discrepancia observada en la convergencia fuerte puede atribuirse al carácter estadístico del método Monte Carlo, al número finito de realizaciones consideradas $N_{MC} = 500$ y al conjunto limitado de discretizaciones temporales evaluadas.

En conjunto, estos resultados demuestran que las soluciones obtenidas son independientes de la discretización empleada dentro de los rangos analizados, descartando la presencia de errores numéricos dominantes y permitiendo atribuir la dispersión observada a la naturaleza física del término estocástico y no a artefactos computacionales.

Figura 5

Validación estadística de las fluctuaciones térmicas generadas por el modelo estocástico



Nota. El histograma muestra una distribución aproximadamente simétrica y consistente con una ley normal. El gráfico cuantil–cuantil (QQ–plot) evidencia una alineación cercana a la recta de referencia para la mayoría de los cuantiles, confirmando que las fluctuaciones generadas mediante los incrementos discretos del proceso de Wiener reproducen adecuadamente el comportamiento gaussiano esperado del ruido blanco utilizado en el modelo.

Con el propósito de verificar la consistencia probabilística del término estocástico, se evaluó la distribución de las fluctuaciones térmicas en el nodo central del dominio ($x=0.5$). Los resultados mostraron una asimetría de 0.0828 y una curtosis de 2.796, valores próximos a los correspondientes a una distribución normal ideal (0 y 3, respectivamente). Como se observa en la **Figura 5**, el histograma experimental presenta un ajuste satisfactorio a la distribución gaussiana teórica, mientras que el gráfico cuantil–cuantil (QQ–plot) evidencia una alineación cercana a la recta de referencia en la mayor

parte del rango de cuantiles. Estas observaciones confirman que las perturbaciones generadas mediante los incrementos discretos del proceso de Wiener reproducen adecuadamente las propiedades estadísticas esperadas del ruido blanco utilizado en la formulación del modelo.

En conjunto, la validación numérica realizada demuestra que la dispersión observada en las simulaciones no constituye un artefacto asociado a la discretización espacial, temporal o al procedimiento de muestreo, sino una consecuencia inherente de la dinámica estocástica introducida en el sistema de conducción térmica. Por tanto, las diferencias identificadas entre materiales y niveles de perturbación son consistentes con la dinámica física representada por el modelo bajo las hipótesis consideradas, respaldando la robustez y confiabilidad de la implementación computacional desarrollada.

Durante el estudio de convergencia espacial, el cálculo de autovalores mediante algoritmos iterativos presentó dificultades de convergencia para la malla más refinada ($N_x = 801$). Sin embargo, esta situación no afectó la solución numérica ni la estimación del orden de convergencia, dado que el operador discreto conservó su estructura simétrica y los errores mantuvieron el comportamiento teórico esperado.

4. Discusión

Los resultados obtenidos permitieron alcanzar el objetivo de la investigación, consistente en comparar las formulaciones determinista y estocástica de la ecuación del calor unidimensional bajo la incorporación de ruido blanco gaussiano aditivo y analizar el efecto de la difusividad térmica sobre la propagación de la incertidumbre.

La elevada concordancia observada entre la solución determinista y la media del ensamblaje Monte Carlo confirma el comportamiento teórico esperado para sistemas gobernados por perturbaciones aditivas de media nula. Este resultado es consistente con la formulación clásica de las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas impulsadas por ruido blanco gaussiano, donde la media del proceso conserva la dinámica determinista subyacente, mientras que la incertidumbre se manifiesta a través del incremento de la dispersión estadística de las trayectorias individuales (Kloeden & Platen, 1992; Lord & Tambue, 2018).

Los resultados evidenciaron que la difusividad térmica desempeña un papel determinante en la propagación de la incertidumbre. El aluminio, caracterizado por una elevada difusividad térmica, presentó los menores valores de RMSE, varianza máxima y amplitud de las bandas de incertidumbre, mientras que la madera exhibió la mayor sensibilidad frente a las perturbaciones aleatorias. Este comportamiento confirma que la difusividad térmica no solo regula la velocidad de disipación del calor, sino también la capacidad del material para amortiguar las fluctuaciones inducidas por el ruido, en concordancia con lo señalado por Adamowicz (2022) y Bergman et al. (2019).

La dependencia aproximadamente lineal observada entre la intensidad del ruido y el RMSE, junto con la relación cuadrática identificada para la varianza, coincide con las

leyes de escala teóricas descritas para ecuaciones diferenciales parciales estocásticas con ruido gaussiano aditivo de baja intensidad (Lord & Tambue, 2018). Asimismo, la estabilidad de la energía térmica promedio observado en todos los escenarios analizados indica que las perturbaciones aleatorias afectan principalmente la variabilidad espacial y temporal de la temperatura, sin alterar significativamente el balance energético global del sistema. Este resultado concuerda con los hallazgos reportados por Li & Su (2022) quienes evidenciaron que la incertidumbre térmica modifica la distribución local de la energía sin generar cambios sustanciales en la dinámica energética promedio.

Desde el punto de vista numérico, la validación realizada respalda la confiabilidad de los resultados obtenidos. La comparación con la solución analítica de referencia confirmó la precisión del esquema de Crank-Nicolson para resolver la ecuación del calor determinista, reproduciendo el orden de convergencia esperado de segundo orden en espacio y tiempo (Crank & Nicolson, 1947; LeVeque, 2007). De manera complementaria, las pruebas de convergencia fuerte y débil verificaron el comportamiento teórico del método de Euler-Maruyama para la integración temporal del término estocástico, en concordancia con los resultados reportados por Higham (2001).

Asimismo, la estabilización de las métricas estadísticas a partir de 200 realizaciones Monte Carlo resultó consistente con la tasa de convergencia teórica del error muestral, proporcional a $\left(ON_{MC}^{-\frac{1}{2}}\right)$, descrita por Kroese et al. (2011). La implementación del algoritmo incremental de Welford (1962) permitió además, estimar de manera eficiente la media y la varianza del ensamblaje, reduciendo el costo computacional y minimizando los errores numéricos asociados al almacenamiento masivo de datos.

El análisis de gaussianidad mostró valores de asimetría y curtosis próximos a los correspondientes a una distribución normal ideal, confirmando que las fluctuaciones térmicas generadas reproducen adecuadamente las propiedades estadísticas del proceso de Wiener utilizado en la formulación del modelo (Rice, 2007). Estos resultados respaldan la consistencia probabilística del esquema implementado y permiten atribuir la dispersión observada a la dinámica física del sistema y no a artefactos numéricos.

Si bien la ecuación del calor unidimensional con ruido blanco gaussiano aditivo constituye un problema ampliamente estudiado, continúa siendo un modelo de referencia para el análisis y validación de estrategias numéricas aplicadas a ecuaciones diferenciales parciales estocásticas (Anton et al., 2017; Dong et al., 2025). En este contexto, el principal aporte del presente trabajo radica en la cuantificación comparativa del efecto de la difusividad térmica sobre la propagación de la incertidumbre en materiales con propiedades difusivas contrastantes, aspecto que ha recibido menor atención en la literatura reciente, predominantemente orientada al desarrollo de esquemas numéricos avanzados y al estudio de problemas de mayor complejidad matemática (Khattab et al., 2024; Cîmpean et al., 2026).

Los resultados deben interpretarse considerando el alcance específico de la investigación. El estudio se restringió a una formulación unidimensional, con propiedades térmicas constantes, materiales homogéneos e isotrópicos y condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas. Asimismo, el análisis se limitó deliberadamente al caso de ruido blanco gaussiano aditivo, debido a que esta formulación constituye un marco de referencia fundamental para el estudio de la interacción entre difusión e incertidumbre y permite establecer comparaciones directas con la solución determinista.

En consecuencia, la extensión del modelo hacia dominios multidimensionales, ecuaciones no lineales, materiales heterogéneos o formulaciones con otros tipos de perturbaciones representa una línea de investigación futura que excede el alcance del presente estudio. No obstante, el marco computacional desarrollado proporciona una base sólida y reproducible para abordar estos escenarios en investigaciones posteriores.

5. Conclusiones

- La comparación entre las formulaciones determinista y estocástica de la ecuación del calor unidimensional permitió demostrar que la incorporación de ruido blanco gaussiano aditivo incrementa la incertidumbre asociada a la respuesta térmica sin modificar de manera significativa la dinámica promedio del proceso difusivo.
- La difusividad térmica se identificó como un factor determinante en la propagación de la incertidumbre, evidenciando que los materiales con mayor capacidad difusiva presentan un efecto amortiguador frente a las perturbaciones aleatorias, el resultado contribuye a la comprensión del papel que desempeñan las propiedades físicas del material no solo en la transferencia de calor, sino también en la respuesta estadística del sistema bajo perturbaciones aleatorias.
- La estabilidad observada en la energía térmica promedio indica que las perturbaciones aleatorias afectan principalmente la variabilidad espacial y temporal de la temperatura, mientras que el comportamiento energético global permaneció acotado para la ecuación de calor unidimensional bajo perturbaciones de ruido blanco gaussiano aditivo y dentro del rango de parámetros evaluado.
- La validación del esquema numérico implementado, mediante análisis de convergencia espacial y temporal de segundo orden, convergencia fuerte y débil del método de Euler–Maruyama, estabilización estadística del método Monte Carlo y verificación de las propiedades probabilísticas del ruido, permitió garantizar la confiabilidad de las simulaciones y atribuir la dispersión observada a la dinámica estocástica del modelo y no a errores de discretización.
- El principal aporte de esta investigación consiste en proporcionar un marco computacional reproducible para la comparación entre modelos deterministas y estocásticos de conducción de calor, incorporando procedimientos de validación numérica que permiten cuantificar el efecto de la difusividad térmica sobre la

propagación de la incertidumbre en materiales con propiedades difusivas contrastantes.

- Los resultados obtenidos constituyen una base para futuras investigaciones orientadas al estudio de modelos de conducción de calor en dimensiones superiores, geometrías complejas o perturbaciones estocásticas más generales.

6. Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses en relación con el artículo presentado.

7. Derechos de autor (copyright)

Los autores son los titulares de los derechos de autor (patrimoniales y/o de explotación) de los contenidos de la revista (*copyright*).

8. Declaración de contribución de los autores

Los autores declaran haber participado de manera equitativa y sustancial en la realización de esta investigación, bajo las responsabilidades según la [Taxonomía CRediT](#) para describir las contribuciones individuales de cada autor al trabajo.

Brigith Magdalena Jiménez Tillaguango & Lidia del Rocio Castro Cepeda realizaron la conceptualización de la investigación, organización y ejecución del ensayo, recopilación y curación de los datos, revisión del análisis estadístico, interpretación de los resultados, elaboración del borrador original, preparación de tablas y figuras, revisión crítica del contenido y aprobación de la versión final del manuscrito.

Divulgación de la delegación a la IA generativa

Los autores declaran el uso de la IA generativa en el proceso de investigación y redacción. Según la taxonomía GAIDeT (2025), las siguientes tareas fueron delegadas a las herramientas GAI bajo supervisión humana total:

- Corrección y edición
- Adaptación y ajuste del tono emocional
- Reformateo

La herramienta GAI utilizada fue: ChatGPT.

La responsabilidad del manuscrito final recae íntegramente en los autores.

Las herramientas GAI no figuran como autores y no asumen responsabilidad por los resultados finales.

Declaración presentada por: Brigith Magdalena Jiménez Tillaguango

9. Costos de financiamiento

La presente investigación fue financiada en su totalidad con fondos propios de los autores.

10. Referencias bibliográficas

- Adamowicz, A. (2022). Determination of thermal diffusivity values based on the inverse problem of heat conduction – numerical analysis. *Acta Mechanica et Automatica*, 16(4), 399-407. <https://doi.org/10.2478/ama-2022-0048>
- Anton, R., Cohen, D., & Quer-Sardanyons, L. (2017). A fully discrete approximation of the one-dimensional stochastic heat equation. *arXiv [math.NA]*. <https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.1711.08340>
- Azorin Penalva, A., & Yaulema Castañeda, J. L. (2021). Case analysis numerical solution of differential equations with uncertainty and applications. *Conciencia Digital*, 4(3.1), 253-272. <https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v4i3.1.1828>
- Bayer, C., Ben Hammouda, C., & Tempone, R. (2024). Multilevel Monte Carlo with numerical smoothing for robust and efficient computation of probabilities and densities. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 46(3), A1514–A1548. <https://doi.org/10.1137/22M1495718>
- Benítez Guarnizo, G. M., Toledo Toledo, J. F., & Martínez Ochoa, L. L. (2025). Implementación de un prototipo de calentador solar para evaluar las variaciones de temperatura producidas en el interior de un cuarto de estudio en la ciudad de Loja. *Alfa Publicaciones*, 7(2.1), 122–149. <https://doi.org/10.33262/ap.v7i2.1.613>
- Bergman, T. L., Lavine, A. S., Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2019). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, Inc. https://books.google.com.ec/books/about/Fundamentals_of_Heat_and_Mass_Transfer.html?id=0kAxEAAQBAJ&redir_esc=y
- Bogoi, A., Dan, C.-I., Strătilă, S., Cican, G., & Crunteanu, D.-E. (2023). Assessment of stochastic numerical schemes for stochastic differential equations with “white noise” using Itô’s integral. *Symmetry*, 15(11), 2038. <https://doi.org/10.3390/sym15112038>
- Cîmpean, I., Nachit, Y., & Tudor, C. A. (2026). Quartic variation of the solution to the semilinear stochastic heat equation: Limit behavior and asymptotic independence with respect to the data. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 557(1), 130258. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.130258>
- Crank, J., & Nicolson, P. (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1), 50–67. <https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>
- Dong, J., Zhao, W., & Li, H. (2025). A structure-preserving reduced-order finite difference approach for a class of semilinear stochastic partial differential equations driven by white noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 552(2), 129807. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129807>
- Elizalde Pin, R. A., Macao Ortega, J. A., & Marrero Ramírez, S. (2024). Análisis comparativo de consumo de energía en una estación de bombeo de agua con

- diferentes algoritmos de control voltaje/frecuencia. *Alfa Publicaciones*, 6(2.2), 48–67. <https://doi.org/10.33262/ap.v6i2.2.488>
- Ermakov, S. & Smilovitsky, M. G. (2021). Monte-Carlo for solving large linear systems of ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University Mathematics Mechanics Astronomy*, 8 (1), 37–48. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.104>
- Esmaeilbeigi, M., Chatrabgoun, O., & Shafa, M. (2019). Numerical solution of time-dependent stochastic partial differential equations using RBF partition of unity collocation method based on finite difference. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 104, 120–134. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.013>
- Evans, L. (2022). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Society. https://books.google.com.ec/books/about/Partial_Differential_Equations.html?id=Ott1EAAQBAJ&redir_esc=y
- Ghajar, A. J., & Çengel, Y. A. (2025). *Heat and mass transfer: fundamentals & applications*. McGraw Hill LLC. https://books.google.com.ec/books/about/Heat_and_Mass_Transfer_Fundamentals_and.html?id=B89MnwEACAAJ&redir_esc=y
- Guzmán Clavijo, C. R., & Alvear Calle, D. A. (2021). Application of the thermal balance equation to determine hygrothermal comfort in a single-family house in canton Giron. *Ciencia Digital*, 5(2), 149-164. <https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v5i2.1722>
- Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 43(3), 525–546. <https://doi.org/10.1137/S0036144500378302>
- Khattab, A. G., Semary, M. S., Hammad, D. A., & Fareed, A. F. (2024). Exploring stochastic heat equations: a numerical analysis with fast discrete fourier transform techniques. *Axioms*, 13(12), 886. <https://doi.org/10.3390/axioms13120886>
- Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
- Kroese, D. P., Taimre, T., & Botev, Z. I. (2011). *Handbook of Monte Carlo methods*. Wiley. <https://www.wiley.com/en-us/Handbook+of+Monte+Carlo+Methods-p-9781118014943>
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). https://books.google.com.ec/books/about/Finite_Difference_Methods_for_Ordinary_a.html?id=lZysESfSWwgC
- Li, Y., & Su, C. (2022). Stochastic heat transfer analysis and reliability assessment under non-stationary random thermal load using the explicit time-domain method.

- International Journal of Heat and Mass Transfer*, 194, 123011.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123011>
- Lord, G. J., & Tambue, A. (2018). A modified semi-implicit Euler-Maruyama scheme for finite element discretization of SPDEs with additive noise. *Applied Mathematics and Computation*, 332, 105–122. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.014>
- Navas Muñoz, M. J., Matovelle Bustos, C., Vélez Arcentales, A., & Córdova, F. (2022). Evaluación de modelos hidráulicos unidimensionales y bidimensionales para la generación de mapas de inundaciones en un río de montaña. *Alfa Publicaciones*, 4(1), 163–182. <https://doi.org/10.33262/ap.v4i1.181>
- Ogethakpo, A. & Nkonyeasua, I. (2025). Analyzing Computational Approaches for Differential Equations: A Study of MATLAB, Mathematica, and Maple. *arXiv [cs.MS]*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.02346>
- Rice, J. A. (2007). *Mathematical statistics and data analysis* (3rd ed.). Cengage Learning.
<https://korivernon.com/documents/MathematicalStatisticsandDataAnalysis3ed.pdf>
- Seyer, L., Enguehard, F., & Rochais, D. (2024). Deterministic and stochastic approaches for the modeling of conduction-radiation coupling within non-Beerian semi-transparent media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 325 (109086), 109086. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2024.109086>
- Sterr, B., Mahravan, E., & Kim, D. (2021). Uncertainty quantification of heat transfer in a microchannel heat sink with random surface roughness. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 174(121307), 121307.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121307>
- Villasante, A., Fernández-Serrano, Á., Osuna-Sequera, C., & Hermoso, E. (2025). Methodology for stiffness prediction in structural timber using cross-validation RMSE analysis. *Journal of Building Engineering*, 107(112767), 112767.
<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2025.112767>
- Welford, B. P. (1962). Note on a method for calculating corrected sums of squares and products semantic scholar. *Technometrics*, 4(3), 419-420.
<https://doi.org/10.1080/00401706.1962.10490022>
- Zhang, A., & Li, Y. (2023). Thermal conductivity of aluminum alloys—a review. *Materials*, 16(8), 2972. <https://doi.org/10.3390/ma16082972>

El artículo que se publica es de exclusiva responsabilidad de los autores y no necesariamente reflejan el pensamiento de la **Revista Alfa Publicaciones**.



El artículo queda en propiedad de la revista y, por tanto, su publicación parcial y/o total en otro medio tiene que ser autorizado por el director de la **Revista Alfa Publicaciones**.

